

УДК 532.685

DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-1

*Н. Г. Тактаров, А. А. Кормилицин, Н. А. Лемясева*

## ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПОРИСТОГО ШАРА

### **Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Изучение движения жидкостей через пористые материалы представляет значительный интерес для исследования природных явлений, а также технологических процессов. В настоящей статье рассматривается движение вязкой жидкости, вызванное вращательным колебательным движением пористого шара в жидкости, помещенной в концентрическую с шаром непроницаемую сферическую оболочку.

*Материалы и методы.* Для решения задачи используются методы математической физики и векторного анализа. Задача решается в сферической системе координат с началом в центре шара. Для построения графиков использованы численные методы.

*Результаты.* Определено движение вязкой жидкости внутри и вне пористого шара. Получены точные аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана в области внутри шара и уравнения Навье – Стокса – вне шара.

*Выводы.* Показано существование внутренних поперечных волн в жидкости, в которых скорость перпендикулярна направлению распространения волны. Внутри шара скорость жидкости изменяется от нуля в центре до некоторого значения на его поверхности. А вне шара скорость изменяется до нуля при удалении от его поверхности. На поверхности шара скорость непрерывна.

**Ключевые слова:** пористая среда, вязкая жидкость, уравнение Бринкмана, поперечные волны.

*N. G. Taktarov, A. A. Kormilitsin, N. A. Lemyaseva*

## TRANSVERSE WAVES IN A VISCOUS FLUID INDUCED BY ROTATING OSCILLATIONS OF A POROUS SPHERE

### **Abstract.**

*Background.* The studying of the fluid motion through porous media is of a significant interest for investigation of natural phenomena and technological processes. The paper considers the motion of a viscous fluid induced by rotating oscillations of a porous sphere in the fluid that is immersed in a nonpermeable concentric spherical shell.

*Materials and methods.* We used the methods of mathematical physics and vector analysis. The problem was solved in a spherical coordinate system. For graphs constructing we used numerical methods.

*Results.* The study has determined the motion of viscous fluid inside and outside of the porous sphere. Exact solutions have been obtained for the nonsteady Brinkman equations inside of the porous sphere and for Navier-Stokes equations outside one.

*Conclusions.* The work proves the existence of intrinsic transverse waves, the velocity of which is perpendicular to the direction of their propagation. Inside of the porous sphere the velocity is changing from zero in the centre to a certain value at the surface. Outside the sphere the velocity is changing to zero when moving away from the surface. At the surface of the sphere the velocity is continuous.

**Key words:** porous medium, viscous fluid, Brinkman's equation, transverse waves.

### **Введение**

Изучение движения жидкостей через пористые материалы представляет значительный интерес для исследования природных явлений, а также многих технологических процессов. При наличии свободной поверхности жидкости на ней могут возникать поверхностные волны, на распространение которых оказывает влияние пористая среда, контактирующая с жидкостью. Поверхностные волны в слое жидкости на пористом основании рассматривались, например в [1]. Наряду с поверхностными волнами в вязкой жидкости могут также существовать внутренние поперечные волны, вызванные колебанием погруженных в нее твердых тел. В частности, в [2] рассмотрены поперечные волны, вызванные движением плоской поверхности, контактирующей с жидкостью и совершающей колебания в своей плоскости, а также волны, возникающие при движении сплошного твердого шара, погруженного в жидкость и совершающего вращательные колебания вокруг оси, проходящей через его центр. В настоящей работе рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости, вызванное вращательным колебательным движением погруженного в нее пористого шара вокруг стационарной оси вращения, проходящей через его центр. Жидкость вместе с шаром помещена в концентрическую с шаром неподвижную непроницаемую сферу.

### **1. Постановка задачи**

Пористая среда (матрица), насыщенная жидкостью, предполагается недеформируемой, однородной и изотропной. Предполагается также, что пористая среда имеет достаточно большую пористость (близкую к единице) и высокую проницаемость. Такими свойствами могут обладать, например, волокнистые, а также сильно вспененные металлические материалы, у которых коэффициент проницаемости достигает  $10^{-4}$  см<sup>2</sup> [3]. При таких свойствах пористой матрицы в ней могут возникать колебательные движения жидкости, в которых скорость жидкости может заметно отличаться от скорости матрицы.

Угловую скорость вращения шара запишем как функцию от времени  $t^*$  в виде  $\Omega^* = \Omega_0 \exp(-i\omega t^*)$ , где  $\Omega_0$  – постоянный действительный вектор,  $\omega$  – частота колебаний шара. Знаком « $*$ » здесь и далее обозначаются размерные переменные (но не размерные параметры), чтобы отличить их от соответствующих безразмерных, обозначаемых теми же буквами.

Пусть  $a$  и  $b$  – радиусы пористого шара и непроницаемой сферы соответственно ( $a < b$ ),  $\eta$  – вязкость свободной жидкости,  $\rho$  – ее плотность. Предполагая малым число Рейнольдса ( $\rho\Omega_0 a^2/\eta \ll 1$ ) и отбрасывая нелинейные слагаемые в ускорении, систему уравнений нестационарного движения жидкости в пористой среде (модель Бринкмана) запишем в следующем виде [4–6]:

$$\frac{\rho \partial \mathbf{u}_1^*}{\Gamma \partial t^*} = -\nabla^* p_1^* + \eta' \nabla^{*2} \mathbf{u}_1^* + \mathbf{F}^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0, \quad (1)$$

здесь  $\Gamma$  – пористость ( $\Gamma = \text{const}$ );  $\mathbf{u}_1^*$  – макроскопическая скорость фильтрации ( $\mathbf{u}_1^* = \Gamma \mathbf{v}_1^*$ , где  $\mathbf{v}_1^*$  – средняя по объему пор скорость);  $p_1^*$  – среднее по объему пор давление;  $\eta'$  – эффективная вязкость жидкости в порах;  $\mathbf{F}^*$  – плотность силы сопротивления пористой матрицы, точки которой с радиус-векторами  $\mathbf{r}^*$ , отложенными от центра шара, движутся со скоростями  $\mathbf{v}^* = \Omega^* \times \mathbf{r}^*$ :

$$\mathbf{F}^* = -\frac{\eta}{K} (\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}^*),$$

$\mathbf{u}^* = \Gamma \mathbf{v}^*$ ;  $K$  – коэффициент проницаемости пористой матрицы.

Если  $K \rightarrow 0$ , то из (1) следует, что  $\mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}^*$ , т.е. жидкость движется вместе с пористой матрицей как единое целое. При сделанном предположении, что пористость достаточно велика, примем, что  $\eta' = \eta$  [4].

Уравнения движения свободной (вне шара) жидкости при сделанных предположениях (приближение Стокса) имеют обычный вид [2]:

$$c \frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\nabla^* p_2^* + 3 \nabla^{*2} \mathbf{u}_2^*, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_2^* = 0. \quad (2)$$

Индексами 1 и 2 обозначаются величины, относящиеся к областям внутри и вне пористого шара соответственно.

Частицы жидкости будут двигаться по окружностям с центрами на оси вращения. Вследствие осевой симметрии относительно оси вращения градиент движения в касательном к этим окружностям направлении будет равен нулю. Поэтому давление выпадет из уравнений движения (1), (2).

Введем сферическую систему координат  $(r^*, \theta, \varphi)$  с началом в центре шара. Полярная ось  $z^*$  этой системы направлена вдоль единичного вектора  $\mathbf{e}_0 = \Omega_0 / |\Omega_0|$ . Угол  $\theta$  отсчитывается от положительной полуоси  $z^*$ . От азимутального угла  $\varphi$  величины не зависят вследствие осевой симметрии.

Граничные условия на поверхности пористого шара  $r^* = a$  [7, 8]:

$$u_{\varphi 1}^* = u_{\varphi 2}^*, \quad \Lambda (\sigma_{r\varphi 1}^* - \sigma_{r\varphi 2}^*) = \eta (u_{\varphi 1}^* - v_{\varphi}^*), \quad (3)$$

на поверхности неподвижной сферы  $r^* = b$ :  $u_{\varphi 2}^* = 0$ .

Здесь  $\Lambda$  – постоянная с размерностью длины;  $\sigma_{r\varphi j}^*$  – компонента тензора напряжений в сферических координатах ( $j = 1, 2$ ):

$$\sigma_{r\varphi j}^* = \eta \left( \frac{\partial u_{\varphi}^*}{\partial r^*} - \frac{u_{\varphi}^*}{r^*} \right)_j.$$

Если пористость значительно отличается от единицы, то в тензоре напряжений в областях 1 и 2 должна стоять вязкость  $\eta'$  и  $\eta$  соответственно.

При  $\Lambda \rightarrow \infty$  из (3) следует условие непрерывности касательных напряжений, а при  $\Lambda \rightarrow 0$  – условие отсутствия проскальзывания жидкости на поверхности пористой матрицы:  $u_{\varphi 1}^* = v_{\varphi}^*$ .

## 2. Решение задачи

Введем безразмерные переменные:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* / a, t = t^* \omega, \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^* / v_0, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2^* / v_0, \mathbf{u} = \mathbf{u}^* / v_0 = \Gamma(\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}) \exp(-it),$$

здесь  $v_0 = \Omega_0 a$ .

Уравнения (1), (2) в безразмерном виде:

$$\frac{\omega a^2}{\Gamma \nu} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{u}_1 - \frac{a^2}{K} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (4)$$

$$\frac{\omega a^2}{\nu} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{u}_2, \quad \nabla \mathbf{u}_2 = 0. \quad (\nu = \eta / \rho).$$

Безразмерные граничные условия:

– при  $r = 1$ :

$$u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}, \quad \lambda \left( \frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial r} - \frac{\partial u_{\varphi 2}}{\partial r} \right) = u_{\varphi 1} - v_{\varphi}; \quad (5)$$

– при  $r = R$ :

$$u_{\varphi 2} = 0,$$

здесь  $\lambda = \Lambda/a$ ,  $v_{\varphi} = \exp(-it) \sin \theta$ ,  $R = b/a$ .

Скорость  $\mathbf{u}_1$  ищется в виде [2]:

$$\mathbf{u}_1 = \exp(-it) \nabla \times [\mathbf{e}_0 f_1(r)] = -\exp(-it) \mathbf{e}_0 \times \nabla f_1(r),$$

здесь  $f_1(r)$  – скалярная функция от  $r = |\mathbf{r}|$ .

Из (4) следует

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 + m_1^2 \mathbf{u}_1 = -\frac{2}{\Gamma} \left( \frac{a}{\delta_1} \right) \mathbf{u}, \quad (6)$$

здесь  $m_1^2 = (2/\Gamma) \left[ i(a/\delta_2)^2 - (a/\delta_1)^2 \right]$ ,  $\delta_1 = \sqrt{2K/\Gamma}$ ,  $\delta_2 = \sqrt{2\nu/\omega}$ , где  $\delta_1$ ,

$\delta_2$  – постоянные с размерностью длины.

Из (6) следует

$$\nabla^2 f_1(r) + m_1^2 f_1(r) = (a/\delta_1)^2 r^2 + \text{const}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$f_1(r) = A_1 \frac{1}{r} \exp(im_1 r) + B_1 \frac{1}{r} \exp(-im_1 r) + Cr^2, \quad (7)$$

$$m_1 = (a/\sqrt{\Gamma})(1/\delta + i\delta/\delta_2^2), \quad 1/\delta^2 = -1/\delta_1^2 + \sqrt{1/\delta_1^4 + 1/\delta_2^4},$$

$$C = (\Gamma / 2) / \left[ i(\delta_1 / \delta_2)^2 - 1 \right],$$

здесь  $A_1, B_1$  – произвольные постоянные.

Поскольку скорость выражается через  $\nabla f_1$ , аддитивная постоянная в (7) отброшена. Для того чтобы решение было конечным при  $r \rightarrow 0$ , следует положить  $B_1 = -A_1$ .

Скорость  $\mathbf{u}_2$  ищется в виде

$$\mathbf{u}_2 = \exp(-it) \nabla \times [\mathbf{e}_\varphi f_2(r)].$$

Согласно (4)  $\mathbf{u}_2$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla \mathbf{u}_2 + m_2^2 \mathbf{u}_2 = 0 \quad (m_2^2 = 2i(a/\delta_2)^2).$$

Отсюда следует:  $\nabla^2 f_2(r) + m_2^2 f_2(r) = \text{const}$ .

Общее решение этого уравнения:

$$f_2(r) = A_2 \frac{1}{r} \exp(im_2 r) + B_2 \frac{1}{r} \exp(-im_2 r), \quad m_2 = (1+i)(a/\delta_2).$$

Здесь аддитивная постоянная в решении отброшена.

Определяя постоянные  $A_1, A_2, B_2$  из граничных условий (5), находим с учетом равенства  $\mathbf{e}_0 \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \sin\theta$  ( $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ ):

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_\varphi e^{-it} F_1(r) \sin\theta, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_\varphi e^{-it} F_2(r) \sin\theta, \quad (8)$$

$$F_1(r) = -\frac{2iA_1}{r} \left( m_1 \cos m_1 r - \frac{1}{r} \sin m_1 r \right) - 2Cr,$$

$$F_2(r) = -A_2 \left( \frac{im_2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) (\cos m_2 r + i \sin m_2 r) + B_2 \left( \frac{im_2}{r} + \frac{1}{r^2} \right) (\cos m_2 r - i \sin m_2 r).$$

Здесь коэффициенты  $A_1, A_2, B_2$  определяются равенствами:

$$A_1 D = \left[ C \left( m_2^2 + 3im_2 - 3 - \frac{im_2 - 1}{\lambda} \right) - \frac{im_2 - 1}{2\lambda} \right] (i - m_2 R) \exp[-im_2(R-1)] -$$

$$- \left[ C \left( m_2^2 - 3im_2 - 3 + \frac{im_2 + 1}{\lambda} \right) + \frac{im_2 + 1}{2\lambda} \right] (i + m_2 R) \exp[im_2(R-1)],$$

$$A_2 D = \left[ \left( 6C - \frac{1}{\lambda} - 2Cm_1^2 \right) \sin m_1 + \left( \frac{m_1}{\lambda} - 6Cm_1 \right) \cos m_1 \right] (im_2 R + 1) \exp(-im_2 R),$$

$$B_2 D = \left[ \left( \frac{m_1}{\lambda} - 6Cm_1 \right) \cos m_1 - \left( \frac{1}{\lambda} + 2C + 2Cm_1^2 \right) \sin m_1 \right] (im_2 R - 1) \exp(im_2 R),$$

$$D = \left[ \left( m_1 m_2^2 - \frac{im_1 m_2 - m_1}{\lambda} \right) \cos m_1 - \left( m_2^2 - m_1^2 + im_1^2 m_2 - \frac{im_2 - 1}{\lambda} \right) \sin m_1 \right] \times$$

$$\times (im_2 R + 1) \exp[-im_2(R-1)] + \left[ \left( m_1 m_2^2 + \frac{im_1 m_2 + m_1}{\lambda} \right) \cos m_1 - \right.$$

$$-\left(m_2^2 - m_1^2 - im_1^2 m_2 + \frac{im_2 + 1}{\lambda}\right) \sin m_1 \left[ (im_2 R - 1) \exp[im_2 (R - 1)] \right].$$

В формулах для скоростей везде подразумеваются действительные части соответствующих комплексных выражений.

При  $R \rightarrow \infty$  выражения (8) для скоростей принимают вид

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{e}_\varphi \left[ \frac{2iA_1'}{r} \left( m_1 \cos m_1 r - \frac{1}{r} \sin m_1 r \right) + 2Cr \right] \exp(-it) \sin \theta,$$

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_\varphi \frac{A_2'}{r^2} \exp[i(m_2 r - t)] (im_2 r - 1) \sin \theta, \quad (9)$$

$$A_1' = \frac{C}{D'} \left[ im_2^2 - 3m_2 - 3i + \frac{m_2 + i}{\lambda} \right] + \frac{m_2 + i}{2\lambda D'},$$

$$A_2' = \frac{(m_1 \cos m_1 - \sin m_1) / \lambda - 2C[(m_1^2 - 3) \sin m_1 + 3m_1 \cos m_1]}{D' \exp(im_2)},$$

$$D' = \left[ m_1^2 - m_2^2 - im_1^2 m_2 + \frac{im_2 - 1}{\lambda} \right] \sin m_1 + \left[ m_1 m_2^2 - \frac{m_1 (im_2 - 1)}{\lambda} \right] \cos m_1.$$

При  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем

$$A_1' = \frac{C}{D'} (im_2^2 - 3m_2 - 3i),$$

$$A_2' = -\frac{2C}{D' \exp(im_2)} \left[ (m_1^2 - 3) \sin m_1 + 3m_1 \cos m_1 \right], \quad (10)$$

$$D' = (m_1^2 - m_2^2 - im_1^2 m_2) \sin m_1 + m_1 m_2^2 \cos m_1.$$

Переход в (9) к пределу  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow 0$  равносильен замене пористого тела непроницаемой для жидкости средой. При этом в (9) следует положить

$$m_1 = \frac{ia}{\sqrt{K}}, \quad m_2 = ak_2, \quad \left( k_2 = \frac{1+i}{\delta_2} \right),$$

а затем перейти к пределу  $K \rightarrow 0$ .

В этом пределе  $\mathbf{u}_1$  принимает вид  $\mathbf{u}_1 = \Gamma \mathbf{e}_\varphi r \exp(-it) \sin \theta$ , или в размерном виде:  $\mathbf{u}_1^* / \Gamma = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^* \exp(-i\omega t^*)$ , а  $\mathbf{u}_2$  – вид:

$$\mathbf{u}_2 = (\mathbf{e}_0 \times \mathbf{r}) \frac{1 - iak_2 r}{r^3 (1 - iak_2)} \exp[iak_2 (r - 1) - it].$$

Это выражение в размерном виде совпадает со скоростью жидкости, движение которой вызвано вращательным колебательным движением сплошного твердого шара [2, § 24]. В пределе  $K \rightarrow 0$  пористую матрицу можно

представить как состоящую из не связанных между собой пор и не пропускающей жидкость через себя. При этом жидкость в порах движется вместе с матрицей как твердое тело со скоростью  $\mathbf{v}^* = \mathbf{u}_1^* / \Gamma$ .

Согласно (8) и (9) выражения для скоростей  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  имеют вид поперечных затухающих волн, в которых скорость перпендикулярна направлению распространения волны (т.е. вектору  $\mathbf{e}_r$ )

### 3. Частные случаи

1. Рассмотрим случай узкого зазора между поверхностью пористого шара и непроницаемой сферой ( $R = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ) при условии  $\lambda \rightarrow \infty$ . Оставляя слагаемые первого порядка малости по  $\varepsilon$  в разложениях соответствующих функций в ряды, получим выражения для коэффициентов в (8):

$$\begin{aligned} A_1 &= -2Cm_1^3(1+3\varepsilon)/D, \\ A_2 &= -2C(im_2+1+m_2^2\varepsilon)\left[(m_1^2-3)\sin m_1+3m_1\cos m_1\right]\exp(-im_2)/D, \\ B_2 &= -2C(im_2-1-m_2^2\varepsilon)\left[(1+m_1^2)\sin m_1+3m_1\cos m_1\right]\exp(im_2)/D, \\ D &= (im_2+1+m_2^2\varepsilon)\left[(m_1^2-m_2^2-im_1^2m_2)\sin m_1+m_1m_2^2\cos m_1\right]+ \\ &+ (im_2-1-m_2^2\varepsilon)\left[(m_1^2-m_2^2+im_1^2m_2)\sin m_1+m_1m_2^2\cos m_1\right]. \end{aligned}$$

2. В пределе  $\omega \rightarrow 0$  (т.е.  $\delta_2 \rightarrow \infty$ ),  $K \rightarrow 0$  (т.е.  $\delta_1 \rightarrow 0$ ),  $\lambda \rightarrow 0$  скорость жидкости в порах  $\mathbf{u}_1/\Gamma$  согласно (9) переходит (в размерном виде) в поле скоростей равномерно вращающегося с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}_0$  сплошного твердого шара:  $\mathbf{v}^* = \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^*$ , а  $\mathbf{u}_2$  переходит в  $\mathbf{u}_2^* = (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}^*)/(a/r^*)^3$ .

3. Остановимся подробнее на рассмотрении поля скоростей, которое определяется формулами (9) при  $R \rightarrow \infty$  и  $\lambda \rightarrow \infty$ , когда коэффициенты  $A_1'$ ,  $A_2'$ ,  $D'$  даются выражениями (10).

На рис. 1 приведены графики зависимости действительной части  $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$  от  $r$ , т.е.  $\text{Re}(u_{\phi 1})$  от  $r$  (при  $0 < r < 1$ ) и  $\text{Re}(u_{\phi 2})$  от  $r$  (при  $r > 1$ ) для пористости  $\Gamma = 0,8$ . Здесь и далее все графики построены при  $\theta = \pi/2$  (экватор пористого шара) для момента времени  $t = 0$  (вследствие нестационарности движения жидкости поле скоростей изменяется со временем). Видно, что при фиксированном  $a/\delta_1 = 0,4$  при увеличении  $a/\delta_2$  модуль скорости  $\text{Re}(u_{\phi 1})$  и  $\text{Re}(u_{\phi 2})$  уменьшается при каждом заданном значении  $r$ .

На рис. 2 приведены соответствующие графики при  $a/\delta_1 = 1$ . Видно, что модули скоростей в этом случае превышают соответствующие значения, приведенные на рис. 1.

При фиксированном значении  $a/\delta_2 = 0,4$  скорость увеличивается с увеличением  $a/\delta_1$  (рис. 3).

На рис. 4 приведены графики скоростей при пористости  $\Gamma = 0,95$ . Сравнение с рис. 3 показывает, что увеличение пористости приводит к увеличению скорости при каждом заданном значении  $r$ .

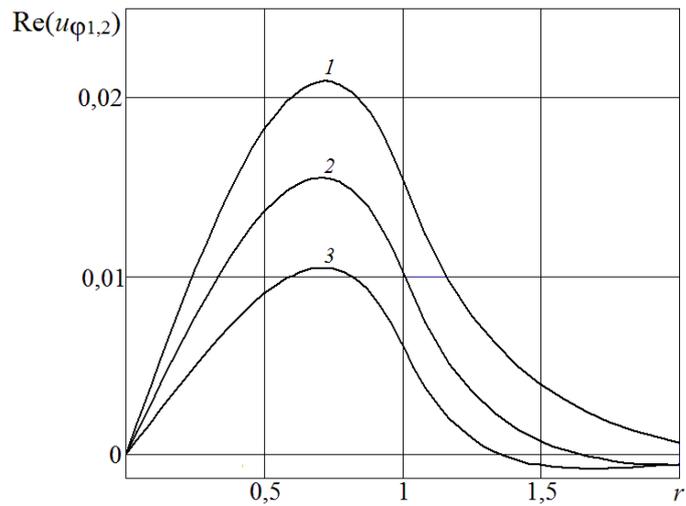


Рис. 1. Зависимость  $\text{Re}(u_{\phi_{1,2}})$  от  $r$ :  $a/\delta_1 = 0,4$ ;  $a/\delta_2 = 1; 1,5; 2$  (кривые 1–3);  $\Gamma = 0,8$

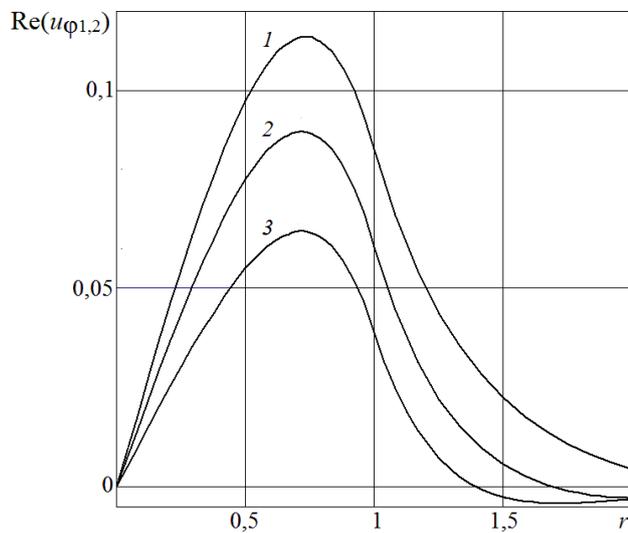


Рис. 2. Зависимость  $\text{Re}(u_{\phi_{1,2}})$  от  $r$ :  $a/\delta_1 = 1$ ;  $a/\delta_2 = 1; 1,5; 2$  (кривые 1–3);  $\Gamma = 0,8$

На рис. 5 приведен график скорости внутри и вне пористого шара при пористости  $\Gamma = 0,95$ . Внутри шара скорость обращается в нуль при двух значениях:  $r \neq 0, r = 0$ . Вне шара скорость обращается в нуль при трех значениях  $r$ , а также при  $r \rightarrow \infty$ . В промежутках между нулевыми значениями скорости направлены в противоположные стороны. Внутри шара имеются три слоя жидкости, движущихся при  $t = 0$  с попарно противоположными скоростями. Аналогично обстоит дело и вне шара. При  $a/\delta_1 = 0,9$  и тех же значениях других параметров, что и на рис. 5 происходит уменьшение скорости при каждом заданном  $r$  внутри и вне шара.

### Заключение

Исследовано движение вязкой жидкости, вызванное вращательным колебательным движением пористого шара, погруженного в нее. Жидкость

с шаром заключена в непроницаемую сферическую оболочку. Определены поля скоростей внутри и вне шара. Показано существование внутренних поперечных волн в жидкости внутри и вне шара. В таких волнах жидкость состоит из нескольких контактирующих слоев, в которых скорость направлена в попарно противоположные стороны перпендикулярно к направлению волны. Скорость жидкости во всех случаях обращается в нуль на оси вращения шара.

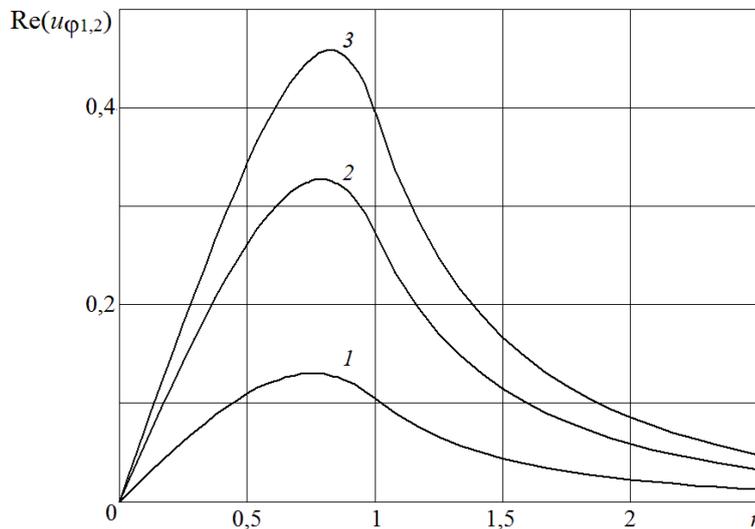


Рис. 3. Зависимость  $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$  от  $r$ :  $a/\delta_1 = 1; 2; 3$  (кривые 1–3);  $a/\delta_2 = 0,4$ ;  $\Gamma = 0,8$

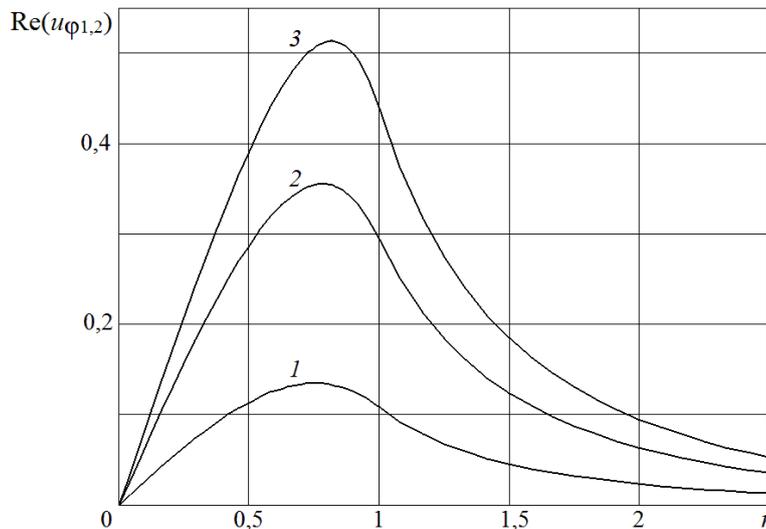


Рис. 4. Зависимость  $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$  от  $r$ :  $a/\delta_1 = 1; 2; 3$  (кривые 1–3);  $a/\delta_2 = 0,4$ ;  $\Gamma = 0,95$

Поля скоростей жидкости внутри и вне шара при различных значениях параметров показаны на графиках. Приведен анализ этих графиков.

Показано, что при определенных упрощающих предположениях из полученных в настоящей работе результатов следуют результаты, полученные

ранее другими авторами для твердого непроницаемого шара, совершающего вращательное колебательное движение в жидкости.

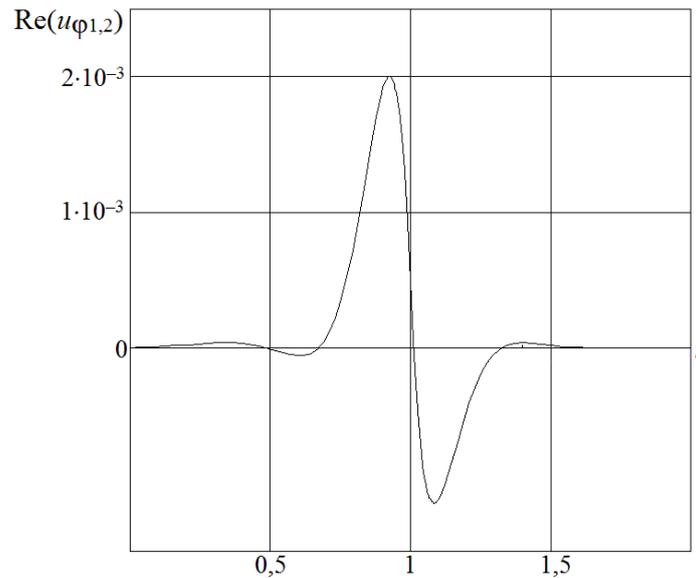


Рис. 5. Зависимость  $\text{Re}(u_{\phi 1,2})$  от  $r$ :  $a/\delta_1 = 1$ ;  $a/\delta_2 = 10$ ;  $\Gamma = 0,95$

#### Список литературы

1. **Столяров, И. В.** Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании / И. В. Столяров, Н. Г. Тактаров // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1987. – № 5. – С. 183–186.
2. **Ландау, Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2006. – 736 с.
3. **Джозеф, Д.** Устойчивость движений жидкости / Д. Джозеф. – М. : Мир, 1981. – 640 с.
4. **Brinkman, H. C.** A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles / H. C. Brinkman. Appl. Sci. Res. – 1947. – Vol. 1, № 1. – P. 27–34.
5. **Nield, D. A.** Spin-up in a saturated porous medium / D. A. Nield // Transport in Porous Media. – 1989. – № 4. – P. 495–497.
6. **Tilton, N.** Linear stability analysis of pressure-driven flows in channels with porous walls / N. Tilton, L. Cortelezzi // J. Fluid Mech. – 2008. – Vol. 604. – P. 411–445.
7. **Ochoa-Tapia, J. A.** Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development / J. A. Ochoa-Tapia, S. Whitaker // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, № 14. – P. 2635–2646.
8. **Ochoa-Tapia, J. A.** Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – II. Comparison with experiment / J. A. Ochoa-Tapia, S. Whitaker // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 1995. – Vol. 38, № 14. – P. 2647–2655.

#### References

1. Stolyarov I. V., Taktarov N. G. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas]. 1987, no. 5, pp. 183–186.

2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Gidrodinamika* [Hydromechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 736 p.
3. Dzhozef D. *Ustoychivost' dvizheniy zhidkosti* [Fluid movement stability]. Moscow: Mir, 1981, 640 p.
4. Brinkman H. C. *A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles*. Appl. Sci. Res. 1947, vol. 1, no. 1, pp. 27 – 34.
5. Nield D. A. *Transport in Porous Media*. 1989, no. 4, pp. 495–497.
6. Tilton N., Cortelezzi L. *J. Fluid Mech.* 2008, vol. 604, pp. 411–445.
7. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 1995, vol. 38, no. 14, pp. 2635–2646.
8. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 1995, vol. 38, no. 14, pp. 2647–2655.

**Тактаров Николай Григорьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра математики  
и методики обучения математике,  
Мордовский государственный  
педагогический институт имени  
М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск,  
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: colonnt@mail.ru

**Taktarov Nikolay Grigor'evich**

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, sub-department  
of mathematics and methods of mathematics  
teaching, Mordovia State Pedagogical  
Institute named after M. E. Evseyev  
(11a Studencheskaya street,  
Saransk, Russia)

**Кормилицин Анатолий Андреевич**

аспирант, Мордовский государственный  
педагогический институт имени  
М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск,  
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: aa.korm@yandex.ru

**Kormilitsin Anatoliy Andreevich**

Postgraduate student, Mordovia State  
Pedagogical Institute named  
after M. E. Evseyev (11a Studencheskaya  
street, Saransk, Russia)

**Лемясева Надежда Александровна**

аспирант, Мордовский государственный  
педагогический институт имени  
М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск,  
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: nadegdalem@mail.ru

**Lemyaseva Nadezhda Aleksandrovna**

Postgraduate student, Mordovia State  
Pedagogical Institute named  
after M. E. Evseyev (11a Studencheskaya  
street, Saransk, Russia)

УДК 532.685

**Тактаров, Н. Г.**

**Поперечные волны в вязкой жидкости, вызванные вращательным колебательным движением пористого шара** / Н. Г. Тактаров, А. А. Кормилицин, Н. А. Лемясева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 3–13. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-1